

НАСТАВНО-НАУЧНОМ ВЕЋУ

Предмет: Оцена научне заснованости теме докторске дисертације кандидата **Милоша Мићовића** под насловом **„Раслојене фамилије функција и стратегије за аутоматско доказивање неких аналитичких неједнакости“**.

Одлуком 272/20 бр. од 11.02.2025. године, именовани смо за чланове Комисије за оцену научне заснованости теме докторске дисертације кандидата Милоша Мићовића под насловом **„Раслојене фамилије функција и стратегије за аутоматско доказивање неких аналитичких неједнакости“** (енгл. „Stratified families of functions and strategies for automated proving of some analytic inequalities“).

На основу материјала приложеног уз Захтев кандидата, Комисија подноси следећи

ИЗВЕШТАЈ

1. Подаци о кандидату

1.1. Биографски подаци

Милош Мићовић је рођен 11.02.1998. године у Београду. Завршио је основну школу „Коста Абрашевић” у Београду као носилац Вукове дипломе и ученик генерације и природно-математички смер Тринаесте београдске гимназије као носилац Вукове дипломе. Током школовања се такмичио на бројним државним такмичењима, а за успех постигнут из математике је награђен и наградом „Доситеја“.

Електротехнички факултет је уписао 2016. године. Дипломирао је 2020. године на одсеку „Рачунарска техника и информатика“ са просечном оценом 9,11. Дипломски рад „Апликација за надгледање Монеро блокчејна“ одбранио је, са оценом 10, код ментора проф. др Павла Вулетића.

Мастер студије на Електротехничком факултету у Београду, на модулу „Софтверско инжењерство“, уписао је 2020. године, а завршио 2021. године са просечном оценом 10,00. Мастер рад „Реализација интернет апликације за симулацију рада брзе“ одбранио је 2021. године, са оценом 10, код ментора проф. др Марије Пунт.

Током студија је био ангажован као студент демонстратор на Катедри за рачунарску технику и информатику и Катедри за примењену математику.

Докторске студије на Електротехничком факултету у Београду, на модулу „Примењена математика“, уписао је 2021. године под менторством проф. др Иване Јововић, а од 2023. године студира под менторством проф. др Бранка Малешевића. Школску 2021/22. годину је провео у статусу мировања. Положио је све испите на докторским студијама са оценом 10.

Објавио је три рада у часописима са SCIE листе, један рад у часопису са ESCI листе и осам конференцијских радова. Такође, има и пет радова који су на рецензији у часописима, од којих је четири рада на рецензији у часописима са импакт фактором.

Током дела средње школе, основних, мастер и дела докторских студија, био је корисник стипендије Републике Србије за изузетно надарене ученике и студенте.

У 2022. години је похађао курс „Become the leader - Enhance your soft skills“ на Universidad Politécnica de Madrid у Мадриду, Шпанија.

Радио је у Институту „Михаило Пупин“ на позицији сарадника од марта до маја 2021. године. Од децембра 2021. године до априла 2023. године је радио у компанији „FIS“ у Београду на позицији софтверског инжењера. Од априла 2023. године је запослен као истраживач приправник у Центру за научно истраживачки рад, Електротехнички факултет Универзитета у Београду.

1.2. Стечено научноистраживачко искуство

Кандидат Милош Мићовић је у свом истраживачком раду показао изузетно интересовање за област теорије аналитичких аналитичких неједнакости.

Милош Мићовић је школске 2021/22. године уписао докторске студије на Електротехничком факултету Универзитета у Београду на модулу „Примењена математика“. Школску 2021/22. годину је провео у статусу мировања. Током докторских студија је положио све испите са оценом 10 и испунио све предвиђене обавезе.

Списак положених испита је приказан у следећој табели:

Назив испита	Оцена	ЕСПБ	Датум полагања
Одабрана поглавља из симболичке алгебре (19Д081СИМБ)	10	9	02.07.2023.
Канонске матричне форме и њихове примене у електротехници (19Д081КМФ)	10	9	31.08.2023.
Линеарна алгебра (19Д081ЛА)	10	9	31.08.2023.
Нумеричка анализа (19Д081НА)	10	9	22.09.2023.
Елементи фази математике са применама (19Д081ЕФМ)	10	9	26.06.2024.
Аутоматско резоновање (19Д081АР)	10	9	06.09.2024.
Примењена статистика (19Д081ПС)	10	9	21.09.2024.

Списак одрађених обавеза је приказан у следећој табели:

Назив обавезе	ЕСПБ	Датум
19 Студијски истраживачки рад I (100021-19)	24	29.09.2023.
19 Студијски истраживачки рад II (100022-19)	24	30.09.2024.

Кандидат је такође, као аутор или коаутор, објавио 4 рада у часописима међународног значаја категорије M20, 3 конференцијска рада категорије M30 и 5 конференцијских радова категорије M60.

Списак објављених радова је приказан у наставку.

Радови објављени у научним часописима међународног значаја категорије M20:

1. B. Banjac, B. Malešević, **M. Mićović**, B. Mihailović, M. Savatović: „*The best possible constants approach for Wilker-Cusa-Huygens inequalities via stratification*“, *Applicable Analysis and Discrete Mathematics*, Vol. 18, No. 1, pp. 244 - 288, April 2024. ISSN: 1452-8630, DOI: 10.2298/AADM240308012B, IF₂₀₂₃ = 1, M22
2. **M. Mićović**, B. Malešević: „*Jordan-Type Inequalities and Stratification*“, *Axioms*, Vol. 13, No. 4, pp. 1-25, April 2024. ISSN: 2075-1680, DOI: 10.3390/axioms13040262, IF₂₀₂₃ = 1.9, M21
3. B. Malešević, **M. Mićović**, B. Mihailović: „*A Parametric Method for Proving Some Analytic Inequalities*“, *Axioms*, Vol. 13, No. 8, pp. 1 - 23, August 2024. ISSN: 2075-1680, DOI: 10.3390/axioms13080520, IF₂₀₂₃ = 1.9, M21
4. B. Malešević, **M. Mićović**: „*Exponential Polynomials and Stratification in the Theory of Analytic Inequalities*“, *Journal of Science and Arts*, Vol. 23, No. 3, pp. 659 - 670, September 2023. ISSN: 1844-9581, DOI: 10.46939/J.Sci.Arts-23.3-a07, IF₂₀₂₃ = 0.3, M24

Радови са међународних научних скупова категорије M30:

5. B. Malešević, A. Rosić, B. Banjac, **M. Mićović**: „*On the Computational Determination of the Third Focus of the Cartesian Oval*“, 32nd Telecommunications Forum (TELFOR), IEEE, Belgrade, Serbia, 26-27 November 2024, DOI: 10.1109/TELFOR63250.2024.10819114, M33
6. **M. Mićović**, I. Jovović: „*Edukativni aplet za računanje korena polinoma stepena manjeg od pet*“, 30th Telecommunications Forum (TELFOR), IEEE, Belgrade, Serbia, 15-16 November 2022, DOI: 10.1109/TELFOR56187.2022.9983723, M33
7. N. Konjikušić, **M. Mićović**, I. Jovović: „*BE-algebras of small order*“, The 2nd Joint Mathematical Meeting of Serbia and Montenegro, Belgrade, Serbia, 26-28 January 2023, M34 <https://konferencije.matf.bg.ac.rs/smsg2023/wp-content/uploads/2023/01/smsg2023-knjiga-apstrakta-1-1.pdf>

Радови са националних научних скупова категорије M60:

8. Ж. Торлак, **M. Мићовић**, Н. Ћировић: „*Примена Блек-Шолсовог, Лиу и Гао модела за одређивање цене европских опција за акције током пандемије COVID-19 вируса*“, Четрнаести Симпозијум „Математика и Примене“, Универзитет у Београду, Математички факултет, Београд, децембар 2024. M64 http://simpozijum.math.rs/s2024/aps_template_srb_lat.pdf
9. **M. Мићовић**, Ж. Торлак, Н. Ћировић: „*Методе конјугованих градијената са применама*“, Тринаести Симпозијум „Математика и Примене“, Универзитет у Београду, Математички факултет, Београд, децембар 2023. M64 <http://simpozijum.math.rs/s2023/Metode%20konjugovanih%20gradijenata%20sa%20primenama.pdf>
10. **M. Мићовић**, Ж. Торлак, И. Јововић, Н. Ћировић: „*Алгоритми за дељење полинома и њихове примене*“, Дванаести Симпозијум „Математика и примене“, Универзитет у Београду, Математички факултет, Београд, децембар 2022. M64 <https://alas.matf.bg.ac.rs/~konferencija/s2022/Algoritmi%20za%20deljenje%20polinoma%20i%20njihove%20primene.pdf>
11. Ж. Торлак, **M. Мићовић**, Н. Ћировић, И. Јововић: „*Примена две нумеричке методе за одређивање нула полинома*“, Дванаести Симпозијум „Математика и примене“, Универзитет у Београду, Математички факултет, Београд, децембар 2022. M64

<https://alas.matf.bg.ac.rs/~konferencija/s2022/Primena%20dve%20numericke%20metode%20za%20odredjivanje%20nula%20polinoma.pdf>

12. **М. Мићовић**, С. Лазић: „*Јава апликација за нумеричку интеграцију*“, Једанаести Симпозијум „Математика и примене“, Универзитет у Београду, Математички факултет, Београд, децембар 2021. М64
<https://alas.matf.bg.ac.rs/~konferencija/s2021/Java%20aplikacija%20za%20numeri%C4%8Dku%20integraciju.pdf>

Кандидат је 25. фебруара 2025. године на Електротехничком факултету Универзитета у Београду јавно усмено бранио тему докторске дисертације пред Комисијом у саставу:

- др Бојана Михаиловић, доцент, Електротехнички факултет Универзитета у Београду
- др Зоран Пуцановић, ванредни професор, Грађевински факултет Универзитета у Београду
- др Бошко Николић, редовни професор, Електротехнички факултет Универзитета у Београду

На јавној усменој одбрани теме докторске дисертације Комисија је кандидата оценила оценом **задовољно**.

1.3. Оцена подобности кандидата за рад на предложеној теми

Кандидат Милош Мићовић је положио све испите на докторским студијама са оценом 10 и испунио све научно-истраживачке обавезе, чиме је до сада остварио 111 ЕСПБ бодова. Такође, кандидат је објавио три рада у часописима са SCIE листе (један рад М21 категорије као први аутор), један рад у часопису са ESCI листе и осам конференцијских радова. Кандидат је пред Комисијом успешно одбранио тему докторске дисертације.

Разматрајући до сада остварене резултате кандидата, Комисија је установила да кандидат Милош Мићовић испуњава све неопходне и формалне услове за приступање изради докторске дисертације са предложеном темом.

2. Предмет и циљ истраживања

При решавању неких инжењерских проблема користи се процењивање и упоређивање реалних израза и функција, тј. доказивање аналитичких неједнакости. Познато је да доказивање многих неједнакости може бити врло сложено и временски захтевно. Због тога би било пожељно аутоматизовати овај процес, што са собом повлачи посебне проблеме. Проналажење нових, бољих константи и/или ограничења у постојећим аналитичким неједнакостима такође је један од значајних изазова.

У теорији аналитичких неједнакости појам раслојених фамилија функција, односно функција које су монотоне по параметру, уведен је и примењен у [1]. Увођење параметра у аналитичку неједнакост, тј. уочавање одговарајуће фамилије функција, омогућава истовремено разматрање, тј. доказивање неједнакости за све реалне вредности параметра за које је уочена фамилија функција раслојена. Анализа особина раслојених фамилија функција показала се као добра техника за уопштавање и генерисање нових аналитичких неједнакости [1-6]. У литератури нема пуно примена ове идеје јер је уведени концепт нов.

Применом концепта раслојених фамилија функција доказивање неких аналитичких неједнакости може се свести на доказивање миксовано тригонометријско полиномских (МТП) неједнакости [7]

$$\sum_{i=1}^n a_i x^{p_i} \sin^{q_i} x \cos^{r_i} x > 0,$$

или на доказивање миксовано експоненцијално полиномских (МЕП) неједнакости [2]

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i x^{p_i} (e^{-x})^{q_i} > 0,$$

где је $n, i \in N$, $p_i, q_i, r_i \in N_0$ и $\alpha_i \in R$, за $x \in (a, b) \subseteq R$.

Једна метода за доказивање МТП неједнакости развијена је у [7]. Анализа која је изложена у [2], урађена на почетку овог истраживања, показала је да се доказивање МЕП неједнакости може реализовати на аналоган начин доказивању МТП неједнакости. Доказивање МТП и МЕП неједнакости је такође често комплексно, па се јавила потреба и за аутоматизацијом овог процеса.

С обзиром на све претходно изложено, предмет овог истраживања биће теорија и примене раслојених фамилија функција у теорији аналитичких неједнакости [8-11], као и методе и стратегије за аутоматско доказивање неких неједнакости. Такође, предмет истраживања биће и аутоматизација процеса доказивања неких аналитичких неједнакости [12-17]. Истраживање ће обухватити и примену добијених резултата на неке конкретне неједнакости.

Циљеви овог истраживања су даљи развој теорије раслојених фамилија функција и њена детаљнија примена у доказивању, генерализацији и побољшавању аналитичких неједнакости. Истраживање ће ићи у правцу идентификовања неједнакости које су погодне за увођење параметра, формирање одговарајућих фамилија функција, као и одређивања услова под којима постоје најбоље могуће константе за те неједнакости. Такође, један од циљева истраживања биће и издвајање оних функција из посматране раслојене фамилије које имају неке оптималне особине, тј. одређивање најбољих константи за посматране аналитичке неједнакости, као и константи за које се добијају апроксимације са најмањом грешком апроксимације (минимакс апроксиманти [1]). Важан циљ је и формализација неких теоријских резултата и поступака доказивања, са посебним акцентом на развој метода, алгоритама и стратегија за аутоматско доказивање одређених аналитичких неједнакости. Биће имплементиране нове методе за доказивање неких МТП и МЕП неједнакости. Имплементирани систем би требало да генерише доказ који је близак људском начину доказивања неједнакости.

Значај овог истраживања је развој нових метода за генерисање, уопштавање и доказивање неких неједнакости. Раслојене фамилије функција и МТП неједнакости имају примене у електротехници и другим областима науке [18,19]. Посебна пажња у овом истраживању биће посвећена функцијама са значајнијим применама у математици и инжењерству (као што је, на пример, функција *sinc*). За овакве функције добиће се уопштења неких постојећих (раније доказаних) неједнакости, тј. нека нова горња и доња ограничења и апроксимације. Аутоматизација процеса доказивања МТП и МЕП неједнакости била би један допринос теорији аналитичких неједнакости, а такође и допринос примени теорије раслојених фамилија функција у математици и инжењерству.

Релевантна литература из области истраживања

- [1] B. Malešević, B. Mihailović: „A minimax approximant in the theory of analytic inequalities“, *Applicable Analysis and Discrete Mathematics*, Vol. 15, No. 2, pp. 486 - 509, 2021. DOI: 10.2298/AADM210511032M
- [2] B. Malešević, M. Mićović: „Exponential Polynomials and Stratification in the Theory of Analytic Inequalities“, *Journal of Science and Arts*, Vol. 23, No. 3, pp. 659 - 670, 2023. DOI: 10.46939/J.Sci.Arts-23.3-a07

- [3] M. Mićović, B. Malešević: „Jordan-Type Inequalities and Stratification“, *Axioms*, Vol. 13, No. 4, 262, pp. 1-25, 2024. DOI: 10.3390/axioms13040262
- [4] B. Malešević, M. Mićović, B. Mihailović: „A Parametric Method for Proving Some Analytic Inequalities“, *Axioms*, Vol. 13, No. 8, 520, pp. 1 - 23, 2024. DOI: 10.3390/axioms13080520
- [5] B. Banjac, B. Malešević, M. Mićović, B. Mihailović, M. Savatović: „The best possible constants approach for Wilker-Cusa-Huygens inequalities via stratification“, *Applicable Analysis and Discrete Mathematics*, Vol. 18, No. 1, pp. 244 - 288, 2024. DOI: 10.2298/AADM240308012B
- [6] B. Malešević, D. Jovanović: „Frame’s Types of Inequalities and Stratification“, *CUBO, A Mathematical Journal*, Vol. 26, No. 1, pp. 1 - 19, 2024. DOI: 10.56754/0719-0646.2601.001
- [7] B. Malešević, M. Makragić: „A method for proving some inequalities on mixed trigonometric polynomial functions“, *Journal of Mathematical Inequalities*, Vol. 10, No. 3, pp. 849 - 876, 2016. DOI: 10.7153/jmi-10-69
- [8] D. Mitrinović: „Analytic Inequalities“, Springer, 1970.
- [9] G.D. Anderson, M. Vuorinen, X. Zhang: „Topics in Special Functions III“. In „Analytic Number Theory, Approximation Theory and Special Functions“, G. Milovanović, M. Rassias (editors), Springer, pp. 297–345, 2014.
- [10] M.J. Cloud, B.C. Drachman, L.P. Lebedev: „Inequalities with Applications to Engineering“, Springer, 2014.
- [11] F. Qi, D.-W. Niu, B.-N. Guo: „Refinements, Generalizations, and Applications of Jordan’s Inequality and Related Problems“. *Journal of Inequalities and Applications*, Vol. 2009, pp. 1 - 52, 2009. Article ID: 271923. DOI: 10.1155/2009/271923
- [12] M. Wenzel: „Isabelle/Isar—a generic framework for human-readable proof documents“, *Studies in Logic, Grammar and Rhetoric, From Insight to Proof—Festschrift in Honour of Andrzej Trybulec*, Vol. 10, No. 23, pp. 277 - 297, 2007.
- [13] L.C. Paulson: „MetiTarski: Past and Future“. In: „Interactive Theorem Proving“, L. Beringer, A. Felty (editors). ITP 2012. *Lecture Notes in Computer Science*, Springer, Berlin, Heidelberg. Vol. 7406, pp. 1–10, 2012. DOI: 10.1007/978-3-642-32347-8_1
- [14] B. Akbarpour, L.C. Paulson: „MetiTarski: An Automatic Theorem Prover for Real-Valued Special Functions“, *Journal of Automated Reasoning*, Vol. 44, pp. 175 - 205, 2010. DOI: 10.1007/s10817-009-9149-2
- [15] A. Robinson, A. Voronkov (editors): „Handbook of Automated Reasoning“, Vol. I, North Holland, 2001.
- [16] L. Wos: „Journal of Automated Reasoning, Special Issue: Advances in Logic Through Automated Reasoning“, L. Wos, ed., Vol. 27, No. 2, 2001.
- [17] M. Mitchell: „Artificial Intelligence: A Guide for Thinking Humans“, Farrar, Straus and Giroux, 2019.
- [18] B. Dong, B. Yu, Y. Yu: „A symmetric homotopy and hybrid polynomial system solving method for mixed trigonometric polynomial systems“, *Mathematics of computation*, Vol. 83, No. 288, pp. 1847 - 1868, 2014. DOI: 10.1090/S0025-5718-2013-02763-9
- [19] B. Yu, B. Dong: „A hybrid polynomial system solving method for mixed trigonometric polynomial systems“, *SIAM Journal on Numerical Analysis*, Vol. 46, No. 3, pp. 1503 - 1518, 2008. DOI: 10.1137/070681740

3. Полазне хипотезе

У оквиру овог истраживања биће разматране следеће хипотезе:

- Помоћу Штурмове теореме се могу доказати полиномске неједнакости.
- Применом раније развијених метода за доказивање МТП неједнакости могуће је прецизније изоловати интервале у којима се налазе корени и локални екстремуми МТП функција.
- Анализа раслојених фамилија функција представља успешну стратегију за генерализовање и/или доказивање одговарајућих аналитичких неједнакости.
- Доказивање неких неједнакости коришћењем теорије о раслојеним фамилијама функција своди се на доказивање МТП или МЕР неједнакости.
- Неке методе и стратегије за доказивање МТП и МЕР неједнакости могуће је формализовати.
- Могуће је имплементирати систем који би у реалном времену доказивао неке МТП и МЕР неједнакости које би човек, због обима посла, споро и/или тешко доказивао.

4. Научне методе истраживања

У току истраживања биће коришћене следеће методе:

- Анализа великог броја доказаних аналитичких неједнакости.
- Анализа до сада развијених метода и стратегија за доказивање аналитичких неједнакости и разматрање њихових ограничења и недостатака.
- Издвајање конкретних неједнакости које се могу разматрати помоћу одговарајућих раслојених фамилија функција.
- Формирање, на основу издвојених неједнакости, класа сличних раслојених фамилија функција за које је могуће формулисати и доказати општија тврђења.
- Доказивање општијих тврђења.
- Развијање нових метода и стратегија за доказивање неких неједнакости.
- Тестирање развијених метода доказивања на већем броју примера.
- Анализа постојећих метода и стратегија за аутоматско доказивање неједнакости.
- Тестирање новог система који ће бити имплементиран.

5. Очекивани научни допринос

Као резултат истраживања, очекују се следећи научни доприноси:

- Теоријски доприноси раслојеним фамилијама функција.
- Побољшање, прецизирање и генерализација неких неједнакости и добијање неких нових неједнакости.
- Одређивање минимакс апроксимација за неке раслојене фамилије функција.
- Доприноси методама, стратегијама и алгоритмима за аутоматско доказивање МТП и МЕР неједнакости.
- Развој и имплементација система за аутоматско доказивање неких неједнакости из класе МТП и МЕР неједнакости.

6. План истраживања и структура рада

Истраживање ће обухватити следеће:

- Истраживање релевантне литературе.
- Анализу постојећих метода доказивања неједнакости.
- Развој нових метода за доказивање и побољшавање неједнакости коришћењем раслојених фамилија функција.
- Издавање аналитичких неједнакости, доказаних у литератури, које се даље могу побољшати коришћењем одговарајућих раслојених фамилија функција.
- Разматрање постојећих и развој нових стратегија и алгоритама за аутоматско доказивање неких неједнакости.
- Одабир погодних софтверских алата за имплементацију система за аутоматско доказивање неких неједнакости.
- Имплементацију система за аутоматско доказивање неких МТП и МЕР неједнакости, који би имитирао људски начин доказивања.
- Тестирање имплементираних система за аутоматско доказивање неједнакости.
- Примене нових теоријских резултата о вези раслојених фамилија функција и аналитичких неједнакости, као и примене развијеног система за аутоматско доказивање МТП и МЕР неједнакости.

7. Закључак и предлог

На основу приложене документације и непосредног увида у досадашњи научни рад кандидата Милоша Мићовића, мастер инжењера електротехнике и рачунарства, Комисија је дошла до следећих закључака:

1. Кандидат испуњава све формалне и суштински потребне и довољне услове прописане Законом о високом образовању, Статутом Универзитета у Београду и Статутом Електротехничког факултета Универзитета у Београду за израду докторске дисертације.
2. Предложена тема „Раслојене фамилије функција и стратегије за аутоматско доказивање неких аналитичких неједнакости“ јесте научно заснована, а резултати који ће проистаћи израдом ове докторске дисертације представљаће значајан и оригиналан допринос. Тема припада ужој научној области Примењена математика.

На основу свега претходно изложеног, Комисија са задовољством предлаже Наставно-научном већу Електротехничког факултета Универзитета у Београду да кандидату Милошу Мићовићу одобри израду докторске дисертације под насловом „Раслојене фамилије функција и стратегије за аутоматско доказивање неких аналитичких неједнакости“ (енгл. „Stratified families of functions and strategies for automated proving of some analytic inequalities“), а за менторе предлаже др Бранка Малешевића, редовног професора Електротехничког факултета Универзитета у Београду, и др Татјану Лутовац, редовног професора Електротехничког факултета Универзитета у Београду.

У Београду, 25.02.2025. године.

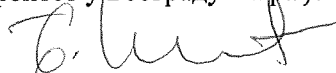
ЧЛАНОВИ КОМИСИЈЕ



др Бојана Михаиловић, доцент
Универзитет у Београду – Електротехнички факултет



др Зоран Пуцановић, ванредни професор
Универзитет у Београду – Грађевински факултет



др Бошко Николић, редовни професор
Универзитет у Београду – Електротехнички факултет